***ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)***
***ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА***
***ИМ. Е.С. ВЕНТЦЕЛЬ***
***ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»***
***2019-2020 УЧ. ГОД***
***Решения к задачам очного тура***
***9-10 классы***

**Вариант 1**

**<u>Задание 1.</u>**

Решение. $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ 1=2 \end{cases} \Rightarrow \textit{решений} \quad \textit{нет} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x=3 \end{cases} \Rightarrow x=1{,}5 \end{array}\right.$$

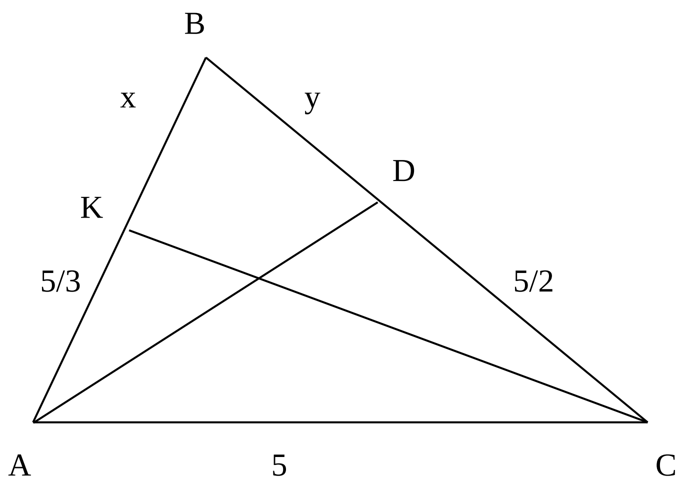
**Ответ: 1,5**

**<u>Задание 2.</u>**

В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CK*. Известно, что *AC* = 5 см, *AK* = 5/3 см, *DC* = 5/2 см.

Найти радиусы вписанной в треугольник и описанной вокруг треугольника *ABC* окружностей.

Решение. Пусть *ABC* данный на чертеже треугольник, где *AD* и *CK* - биссектрисы. Обозначим *KB = x; BD = y*.



По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника получаем два соотношения: $\frac{\frac{5}{3}+x}{5}=\frac{2y}{5}$; $\frac{\frac{5}{2}+y}{5}=\frac{3x}{5}$.

Выразим $x$ из второго уравнения $x = \frac{\frac{5}{2}+y}{3}$ и подставим в первое:

$5 + \frac{5}{2} + y = 6y;$ $y = \frac{3}{2};$ $x = \frac{4}{3}$.

Отсюда следует, что $AB = 3$; $BC = 4$ и по теореме, обратной к теореме Пифагора, следует, что угол $B$ прямой и $AC$ – гипотенуза треугольника.

В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы или $R = \frac{5}{2}$.

Радиус вписанной окружности найдем по формуле:

$r = \frac{S}{p} = \frac{3\times 4}{3+4+5} = 1.$

**Ответ: *R* = 2,5; *r* = 1**

**<u>Задание 3.</u>**

Пришла баба на базар торговать яйцами. Первому покупателю она продала четверть всех яиц и еще 1/4 яйца, второму — треть всех оставшихся яиц и еще 1/3 яйца, третьему — половину оставшихся яиц и еще пол-яйца, четвертому — треть оставшихся яиц и еще 1/3 яйца, после чего у нее осталось 5 яиц. Сколько яиц принесла баба на базар для продажи?

Решение. Пусть баба принесла х яиц. Тогда

$$I.\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\Rightarrow осталось\quad \frac{3x}{4}-\frac{1}{4};$$

$$II.\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\Rightarrow осталось\quad \frac{x}{2}-\frac{1}{2};$$

$$III.\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow осталось\quad \frac{x}{4}-\frac{3}{4};$$

$$IV.\frac{x}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\Rightarrow осталось\quad \frac{x}{6}-\frac{5}{6}=5\Rightarrow x=35$$

**Ответ: 35**

**<u>Задание 4.</u>**

В арифметической прогрессии второй член равен 6, а сумма первого, пятого и шестого членов равна нулю. Найти первый член и разность прогрессии.

Решение. $\begin{cases} a+d=6; \\ a+a+4d+a+5d=0 \end{cases}$

**Ответ: $a_1$ = 9, d = -3**

**<u>Задание 5.</u>**

Решить уравнение: $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x$

Решение. Непосредственно проверим, что точки $x = \pi n$, где $\sin x = 0$, не являются решением этого уравнения.

Умножим обе части уравнения на $8 \sin x$. Получим:

$8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x \cos 15x;$

$4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x \cos 15x;$

$2 \sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin x \cos 15x;$

$\sin 8x \cos 8x = \sin x \cos 15x;$

$\frac{1}{2} \sin 16x = \frac{1}{2} ( \sin 16x - \sin 14x );$

$\sin 14x = 0;\ \ 14x = \pi k,\ k \in Z;\ x = \frac{\pi k}{14},\ k \in Z.$

Так как $x = \pi n$ не являются решением уравнения, то надо исключить те значения $k$, при которых $k = 14n,\ n \in Z$.

**Ответ: $x = \frac{\pi k}{14}$, k ∈ Z, k ≠ 14n, n ∈ Z**

**<u>Задание 6.</u>**

Упростить выражение:

$x^2 + y^2 - 2\left(x^3 y^2 + x^2 y^3\right) - x^4 - y^4 - 2xy + 1,$

где $x, y$ корни уравнения $2t^2 + 2t + a = 0$.

Решение. По теореме Виета *x+y=-1; xy=a/2*. Следовательно,

$$x^2+y^2=1-a;\quad x^4+y^4=(1-a)^2-2\frac{a^2}{4}=1-2a+\frac{a^2}{2};$$ тогда

$$x^2+y^2-2\left(x^3y^2+x^2y^3\right)-x^4-y^4-2xy+1=1-a-2\frac{a^2}{4}(-1)-1+2a-$$

$$-\frac{a^2}{2}-a+1=1.$$

**Ответ: 1**

**<u>Задание 7.</u>**

Решить уравнение: $x^2+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}=2x+\frac{9}{4}$.

Решение. Введем новую переменную $y=x-\frac{1}{2x}$, тогда

$$y^2=x^2-1+\frac{1}{4x^2}.$$

Получим уравнение:

$$y^2-2y-\frac{5}{4}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{5}{2};\\ y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-5x-1=0;\\ 2x^2+x-1=0.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ x=\frac{1}{2};\\ x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}.\end{array}\right.$$

**Ответ: -1, 1/2,** $\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$

***ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)***
***ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА***
***ИМ. Е.С. ВЕНТЦЕЛЬ***
***ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»***
***2019-2020 УЧ. ГОД***
***Решения к задачам очного тура***
***9-10 классы***

**Вариант 2**

**<u>Задание 1.</u>**

Решение. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 2\\ -1 = 2\end{cases} \Rightarrow \textit{решений}\quad \textit{нет}\\ \begin{cases}x < 2\\ 2x = 0\end{cases} \Rightarrow x = 0\end{array}\right.$$

**Ответ: 0**

**<u>Задание 2.</u>**

Дан треугольник с вершинами $A$(-1;2;0), $B$(1;0;1), $C$(1;1;3). Найти координаты центра окружности, описанной вокруг этого треугольника.

Решение. Найдем длины сторон треугольника.

$AB = \sqrt{4+4+1} = 3$; $AC = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$; $BC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Нетрудно видеть, что $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Отсюда следует, что треугольник $ABC$ прямоугольный и $AC$ является его гипотенузой. Так как центр $O$ описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, то координаты точки $O$ являются средним арифметическим координат его концов, а именно $O$ (0; 1,5; 1,5).

**Ответ: *O* (0; 1,5; 1,5)**

**<u>Задание 3.</u>**

К продавцу лошадей пришли три казака покупать лошадей. “Хорошо, я вам продам лошадей, - сказал продавец, - первому я продам полтабуна и еще половину лошади, второму - половину оставшихся лошадей и еще пол-лошади, третий также получит половину оставшихся лошадей с полулошадью. Себе я оставлю лишь пять лошадей”. Сколько лошадей намеревался продать продавец каждому казаку?

**Ответ: 1-ый – 24; 2-ой – 12; 3-ий – 6**

**Задание 4.**

В арифметической прогрессии четвертый член равен 2, а сумма первого, шестого и восьмого членов равна нулю. Найти первый член и разность прогрессии.

Решение: $\begin{cases} a + 3d = 2; \\ a + a + 5d + a + 7d = 0. \end{cases}$

**Ответ: $a_1$ = 8, d = -2**

**Задание 5.**

Решить уравнение:

$$\cos 3x \cos 6x \cos 12x = \frac{1}{4} \cos 21x.$$

Решение. Непосредственно проверим, что точки $x = \frac{\pi n}{3}$, где $\sin 3x = 0$, не являются решением этого уравнения.

Умножим обе части уравнения на $8 \sin 3x$. Получим:

$8\sin 3x \cdot \cos 3x \cos 6x \cos 12x = 2\sin 3x \cdot \cos 21x;$

$4\sin 6x \cos 6x \cos 12x = \sin 24x - \sin 18x;$

$2\sin 12x \cos 12x = \sin 24x - \sin 18x;$

$\sin 18x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{18}, n \in Z, n \neq 6k, k \in Z.$

**Ответ: x = πk/18; k ≠ 6n; k, n ∈ Z**

**Задание 6.**

Упростить выражение: $6\left(x^3y^2 + x^2y^3\right) + 3x^4 + 3y^4 - 4\left(x^3 + y^3\right) + 1$, где $x, y$ корни уравнения $2t^2 + 2t + p = 0$.

Решение. По теореме Виета $x+y=-1;\ xy=p/2$. Следовательно,

$$x^2+y^2=1-p; \quad x^4+y^4=(1-p)^2-2\frac{p^2}{4}=1-2p+\frac{p^2}{2};$$

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=-\left(1-p-\frac{p}{2}\right)=\frac{3p}{2}-1; \text{тогда}$$

$$6\left(x^3y^2+x^2y^3\right)+3x^4+3y^4-4\left(x^3+y^3\right)+1=6\cdot\frac{p^2}{4}\cdot(-1)+3\left(1-2p+\frac{p^2}{2}\right)-$$

$$-4(-1)\left(\frac{3p}{2}-1\right)+1=0.$$

**Ответ: 0**

**<u>Задание 7.</u>**

Решить уравнение: $x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=x+4$.

Решение. Введем новую переменную $y=x-\frac{1}{x}$, тогда

$$y^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}.$$

Получим уравнение:

$$y^2-y-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2;\\ y=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-1=0;\\ x^2+x-1=0.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{2};\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $1\pm\sqrt{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$